Olympiade Francophone de Mathématiques

Troisième édition

Épreuve Senior — Solutions et barèmes

1. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que, pour tous les entiers m et n :

$$f(m+n) + f(m)f(n) = n^2(f(m)+1) + m^2(f(n)+1) + mn(2-mn).$$

Solutions

Solution 1 Notons $\mathbf{E}(m,n)$ l'équation de l'énoncé. L'équation $\mathbf{E}(0,0)$ indique que $f(0)=0$ ou $f(0)=-1$. Si $f(0)=0$, l'équation $\mathbf{E}(0,n)$ indique que $f(n)=n^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On suppose donc désormais que $f(0)=-1$.

L'équation $\mathbf{E}(-n,n)$ indique désormais que

$$-1 + f(n)f(-n) = n^2(f(n) + f(-n) - n^2),$$

ce que l'on factorise comme

$$(f(n)-n^2)(f(-n)-n^2) = 1.$$

Puisque $f(n)-n^2$ et $f(-n)-n^2$ sont des entiers, cela signifie que l'entier $g(n) = f(n)-n^2 = f(-n)-n^2$ est égal à ± 1.

L'équation $\mathbf{E}(m,n)$ se réécrit alors comme

$$g(m+n) + g(m)g(n) = 0,$$

ce qui signifie que la fonction $-g$ est multiplicative. Les deux fonctions g possibles sont donc $g\colon n \mapsto -1$ et $g\colon n \mapsto (-1)^{n+1}$. Par ailleurs, la fonction $n \mapsto 0$ est elle aussi multiplicative.

En conclusion, les trois fonctions solutions sont

$$f\colon n \mapsto n^2,\ f\colon n \mapsto n^2-1 \text{ et } f\colon n \mapsto n^2 + (-1)^{n+1}.$$

Solution 2 Notons $\mathbf{E}(m,n)$ l'équation de l'énoncé, et posons $a = f(0)$ et $b = f(1)$. L'équation $\mathbf{E}(1,n)$ indique que

$$f(n+1) = (1-b)f(n) + bn^2 + 2n + 1,$$

ce qui se réécrit comme

$$f(n+1) - (n+1)^2 = (1-b)(f(n)-n^2).$$

- Si $b=0$, cela signifie que $f\colon n \mapsto n^2+a$. Réciproquement, l'équation $\mathbf{E}(m,n)$ se réécrit alors comme

  $$m^2+2mn+n^2+a+m^2n^2+am^2+an^2+a^2 = m^2n^2+(a+1)n^2+m^2n^2+(a+1)m^2+2mn-m^2n^2,$$

  c'est-à-dire comme $a(a+1)=0$. Ainsi, la fonction $f\colon n \mapsto n^2+a$ est solution si et seulement si $a=0$ ou $a=-1$.

- Si $b = 1$, c'est que $f\colon n \mapsto n^2$, qui est un cas particulier du cas précédent.
- Si $b = 2$, c'est que $f\colon n \mapsto n^2 + (-1)^n a$. Réciproquement, l'équation $\mathbf{E}(m, n)$ se réécrit alors comme

$$\begin{gathered} m^2 + 2mn + n^2 + (-1)^{m+n}a + m^2n^2 + (-1)^n am^2 + (-1)^m an^2 + (-1)^{n+m}a^2 \\ = \\ m^2n^2 + ((-1)^m a + 1)n^2 + m^2n^2 + ((-1)^n a + 1)m^2 + 2mn - m^2n^2, \end{gathered}$$

  c'est-à-dire comme $(-1)^{m+n}a(a+1) = 0$. Ainsi, la fonction $f\colon n \mapsto n^2 + (-1)^n a$ est solution si et seulement si $a = 0$ ou $a = -1$.
- Sinon, c'est que $f\colon n \mapsto n^2 + a(1-b)^n$. On sait donc que $\lim_{-\infty}(f(n) - n^2) = 0$. Comme $f(n) - n^2$ est un entier, il vaut donc 0 pour un n négatif assez grand, de sorte que $a = 0$ et que $f\colon n \mapsto n^2$.

En conclusion, les trois fonctions solutions sont

$$f\colon n \mapsto n^2,\ f\colon n \mapsto n^2 - 1 \text{ et } f\colon n \mapsto n^2 + (-1)^{n+1}.$$

Barème

Le barème consiste en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent.

1. Montrer que $f\colon n \mapsto n^2$ si $f(0) = 0$, ou montrer que $f\colon n \mapsto n^2$ si $f(1) = 1$, ou montrer que $f(0) \in \{-1, 0\}$ ..... `1 pt`

2. Obtenir une relation de récurrence sur f, par exemple via $\mathbf{E}(1, n)$ ..... `1 pt`

3. Factoriser la relation précédente, ou introduire g ou une de ses variantes ..... `2 pts`

⚠ La factorisation doit être dans le même esprit de celles données dans les deux solutions.

4. Donner un argument qui utilise le fait que f prenne ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et qui permet de conclure ..... `2 pts`

⚠ L'argument doit être manipulé comme proposé dans les deux solutions.

5. Donner les trois solutions et les vérifier explicitement ..... `1 pt`

⚠ Les erreurs de calculs (oubli d'une solution etc) sont couvertes par cet item.

2. Pour se connecter au site de l'OFM, Alice doit choisir un mot de passe. Ce dernier doit être formé de n caractères parmi les 27 caractères suivants :

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ Y,\ Z,\ \#.$$

On dit qu'un mot de passe m est *redondant* si on peut colorier en rouge et bleu un bloc de lettres consécutives de m de telle manière que le mot formé des lettres rouges soit identique au mot formé des lettres bleues. Par exemple, le mot de passe $H\#ZBZJBJZ$ est redondant, car il contient le bloc $\underline{ZB}\overline{Z}\underline{J}\overline{BJ}$, où le mot ZBJ apparaît à la fois en bleu et en rouge. Au contraire, le mot de passe $ABCACB$ n'est pas redondant.

Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe au moins 18^n mots de passe de longueur n, c'est-à-dire formés de n caractères chacun, qui ne sont pas redondants.

Solution

Ci-dessous, on note $\overline{R}_n$ l'ensemble des mots de passe non redondants de longueur n, Σ l'alphabet, et B_{2k} l'ensemble des blocs redondants de longueur $2k$. On note également $\overline{r}_n$ et b_{2k} les cardinaux respectifs de ces ensembles $\overline{R}_n$ et B_{2k}. On pose enfin $\sigma = 27$ et $\lambda = 18$.

Tout mot $m \in \overline{R}_{n+1}$ a un préfixe non redondant, ce qui fait que $\overline{R}_{n+1} \subseteq \overline{R}_n\Sigma$. Réciproquement, si un mot $m \in \overline{R}_n\Sigma$ est redondant, tout bloc redondant que contient m est un suffixe de m. En notant $2k$ la longueur d'un tel bloc, on en déduit que $m \in \overline{R}_{n+1-2k}B_{2k}$. Plus généralement, on dispose donc de la relation d'inclusion

$$\overline{R}_n\Sigma \subseteq \bigcup_{0\leqslant 2k\leqslant n+1} \overline{R}_{n+1-2k}B_{2k}.$$

En termes de cardinaux, cette relation se réécrit comme

$$\sigma\,\overline{r}_n \leqslant \overline{r}_{n+1} + \sum_{2\leqslant 2k\leqslant n+1} \overline{r}_{n+1-2k}b_{2k}.$$

Dès lors, il s'agit de majorer aussi bien les nombres $\overline{r}_{n+1-2k}$ que les nombres b_{2k}. Or, il y a 2^{2k} manières de colorier un bloc (redondant ou pas) de longueur $2k$ puis, si ce bloc contient k lettres rouges, il y a σ^k manières de choisir ces lettres. Ainsi, il y a au plus $2^{2k} \times \sigma^k$ blocs redondants de longueur $2k$, ce qui signifie que $b_{2k} \leqslant (4\sigma)^k$.

Par ailleurs, puisque l'on a manifestement $\overline{r}_{n+1} \leqslant \sigma\,\overline{r}_n$, une idée pour démontrer que $\overline{r}_n \geqslant \lambda^n$ serait en fait de montrer que $\overline{r}_{k+1} \geqslant \lambda\overline{r}_k$ pour tout entier $k \geqslant 0$. On procède alors par récurrence. En effet, si l'on a déjà $\overline{r}_{k+1} \geqslant \lambda\overline{r}_k$ lorsque $k \leqslant n-1$, l'inégalité sur les cardinaux montre que

$$\sigma\,\overline{r}_n \leqslant \overline{r}_{n+1} + \sum_{2\leqslant 2k\leqslant n+1} \lambda^{1-2k}\,\overline{r}_n \times (4\sigma)^k \leqslant \overline{r}_{n+1} + \lambda\overline{r}_n \sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{4\sigma}{\lambda^2}\right)^k = \overline{r}_{n+1} + 9\,\overline{r}_n,$$

ce qui conclut.

Barème

Le barème consiste en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent.

1. Chercher à montrer que $\overline{r}_{k+1} \geqslant \lambda\, \overline{r}_k$ ..... `1 pt`

2. S'intéresser à l'ensemble $\overline{R}_n\Sigma$ ou à $\Sigma\overline{R}_n$ ..... `1 pt`

⚠ Si l'élève s'intéresse à un mot dans $\overline{R}_n\Sigma$ ou $\Sigma\overline{R}_n$, et sans même s'intéresser à l'ensemble $\overline{R}_n\Sigma$ ou $\Sigma\overline{R}_n$ lui-même, il accomplit cet objectif.

3. Expliquer que $\overline{R}_n\Sigma \subseteq \cup_{0\leqslant 2k\leqslant n+1}\overline{R}_{n+1-2k}B_{2k}$ ..... `1 pt`

⚠ Là encore, si l'élève montre cette inclusion sans s'intéresser aux ensembles considérés mais uniquement à un élément générique de $\overline{R}_n\Sigma$, il accomplit cet objectif.

4. Réinterpréter de l'objectif 2 en termes de cardinaux ..... `1 pt`

⚠ Si l'élève cherche à majorer $\overline{r}_{n+1-2k}$ ou b_{2k}, il accomplit cet objectif.

5. Montrer que b_{2k} est majoré par un nombre x_k explicite en fonction de k et tel que $x_k \leqslant (4\sigma)^k$ ..... `1 pt`

⚠ Si cet objectif est rempli, l'objectif 4 est également rempli.

6. Une fois l'objectif 3 atteint, conjecturer que $\overline{r}_{n+1-2k} \leqslant \lambda^{1-2k}\,\overline{r}_n$, ou toute autre majoration de $\overline{r}_{n+1-2k}$ permettant de conclure ..... `1 pt`

7. Conclure ..... `1 pt`

3. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note Δ la tangente en A au cercle Γ. Soit Γ_1 un cercle tangent aux droites Δ, (AB) et (BC), et E son point de tangence avec la droite (AB). Soit Γ_2 un cercle tangent aux droites Δ, (AC) et (BC), et F son point de tangence avec la droite (AC).

On suppose que E et F appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$, et que les deux cercles Γ_1 et Γ_2 se trouvent à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Solution

Si les droites Δ et (BC) sont parallèles, soit O le centre de Γ. Alors la droite (AO) et la médiatrice du segment $[BC]$ sont perpendiculaires à Δ et à (BC), donc sont confondues. Dans ce cas, le triangle ABC est isocèle en A, et la médiatrice de $[BC]$ est un axe de symétrie de la figure, donc du segment $[EF]$, qui se retrouve ainsi parallèle à (BC).

Sinon, soit P le point d'intersection des droites Δ et (BC) ; alors Γ_1 et Γ_2 sont les cercles inscrit et exinscrit des triangles ABP et ACP selon les cas.

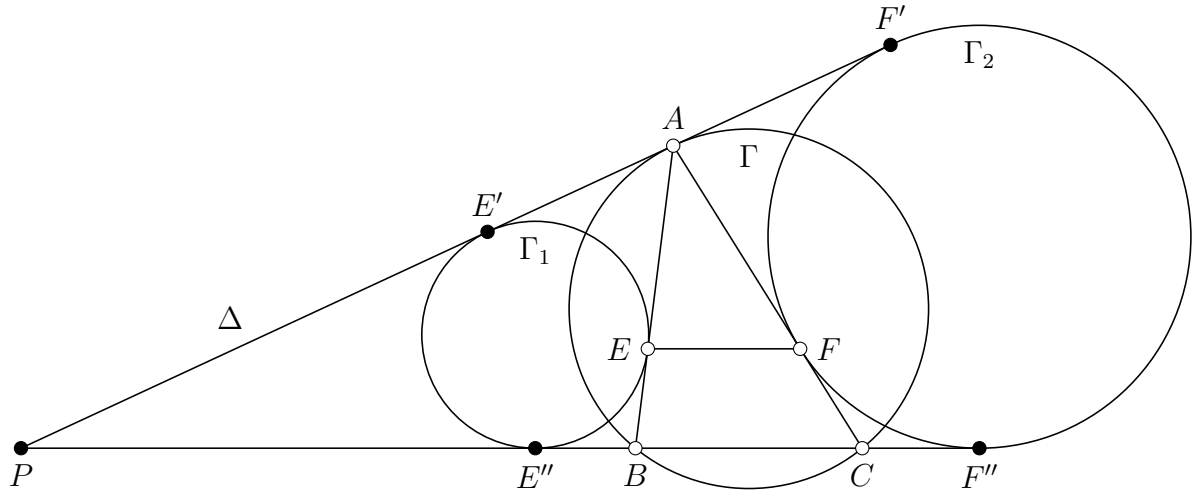
On sait alors, par la transformation de Ravi, que

$$2AE = AB + AP - PB \text{ et } 2AF = AC + PC - PA.$$

Par ailleurs, puisque Δ est tangente à Γ en A, les triangles PAB et PCA sont semblables. Par conséquent,

$$\frac{2AE}{AB} = \frac{AB}{AB} + \frac{AP}{AB} - \frac{PB}{AB} = \frac{AC}{AC} + \frac{CP}{CA} - \frac{PA}{CA} = \frac{2AF}{AC},$$

et le théorème de Thalès nous permet enfin de conclure que (BC) et (EF) sont bien parallèles.



Barème

Le barème se décompose en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent.

1. Introduire le point P ou traiter complètement le cas où $\Delta \parallel (BC)$ ..... `1 pt`

2. Affirmer que Γ_1 est le cercle inscrit dans ABP ou que Γ_2 est le cercle P-exinscrit dans ACP, ou introduire les points E', E'', F' et F'' les autres points de tangence de Γ_1 et Γ_2 aux droites Δ et (BC) ..... `1 pt`

3. Affirmer que PAC et PBA sont semblables ..... `1 pt`

⚠ Si l'élève démontre simplement que $PA^2 = PB \times PC$, par exemple en utilisant la puissance de P par rapport à Γ ..... `0 pt`

4. Affirmer que $2AE = AB + AP - PB$ ..... `1 pt`

5. Affirmer que $2AF = AC + PC - PA$ ..... `1 pt`

6. Montrer que $AE/AB = AF/AC$ ..... `2 pts`

⚠ Si l'élève utilise l'existence de P sans mentionner le cas où Δ et (BC) sont parallèles, il ne peut pas obtenir plus de 6 points en tout.

4. Trouver tous les entiers $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ tels que a soit pair et tous les chiffres de l'écriture décimale de $a^b + 1$ soient égaux.

Solutions

Solution 1 Le problème se réécrit comme suit : il s'agit de trouver les entiers a et b tels que $9 \times a^b + (d+9) = d \times 10^n$, avec $n \geqslant 1$ et $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. On traite donc plusieurs cas, en fonction de la valeur de d :

- Si $d \equiv 1 \pmod 4$, l'égalité de l'énoncé devient $9 \times a^b = d \times 10^n - (d+9)$. Si $n \geqslant 2$, cela signifie que $a^b \equiv 2 \pmod 4$, ce qui est incompatible avec le fait que $b \geqslant 2$. Par conséquent, $n = 1$ et $a^b = d - 1$ est égal à 0, $4 = 2^2$ ou $8 = 2^3$. Ainsi, dans ce cas, $(a, b) = (2, 2)$ ou $(a, b) = (2, 3)$.
- Si $d = 3$, l'égalité de l'énoncé devient $3 \times a^b = 10^n - 4$. Si $n \geqslant 3$, cela signifie que $3 \times a^b \equiv 4 \pmod 8$, donc que $b = 2$. Mais alors $3 \times a^2 \equiv 1 \pmod 5$, ce qui est impossible puisque $3 \times a^2 \equiv 0, 3, 2, 2, 3 \pmod 5$ selon que $a \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$. Par conséquent, $n \leqslant 2$, et a^b est égal à 2 ou $32 = 2^5$. Ainsi, dans ce cas, $(a, b) = (2, 5)$.
- Si $d = 7$, l'égalité de l'énoncé devient $9 \times a^b = 7 \times 10^n - 16$. Si $n \geqslant 5$, cela signifie que $9 \times a^b \equiv 16 \pmod{32}$, donc que $b = 2$ ou $b = 4$. Dans tous les cas, b est pair, et en posant $c = a^{b/2}$, on constate que $2 \times c^2 \equiv 5 \pmod 7$, ce qui est impossible puisque $2 \times c^2 \equiv 0, 2, 1, 4, 4, 1, 2 \pmod 7$ selon que $c \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 7$. Par conséquent, $n \leqslant 4$, et a^b est égal à $6 = 2 \times 3$, $76 = 2^2 \times 19$, $776 = 2^3 \times 97$ ou $7776 = 2^5 \times 3^5$. Ainsi, dans ce cas, $(a, b) = (6, 5)$.

En conclusion, les entiers recherchés sont les paires $(a, b) \in \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (6, 5)\}$.

Solution 2 Le problème se réécrit comme suit : il s'agit de trouver les entiers a et b tels que $9 \times a^b = d \times 10^n - (d+9)$, avec $n \geqslant 1$ et $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ici, on s'intéresse plutôt à $v_2(a^b) = bv_2(a)$ et on traite plusieurs cas en fonction de la valeur de d :

- Si $d \equiv 1 \pmod 4$, on sait que $bv_2(a) \geqslant b \geqslant 2 > 1 = v_2(d+9)$, donc $n = v_2(d+9) = 1$. Ainsi, $a^b = d - 1$ est égal à 0, $4 = 2^2$ ou $8 = 2^3$, et $(a, b) = (2, 2)$ ou $(a, b) = (2, 3)$.
- Si $d = 3$, on sait que $bv_2(a) \geqslant b \geqslant 2 = v_2(d+9)$. Par conséquent, soit $bv_2(a) > 2$ et $n = 2$, auquel cas $a^b = 32 = 2^5$ et $(a, b) = (2, 5)$, soit $bv_2(a) = 2$ et $n > 2$. Dans ce second cas, on sait que $b = 2$, et on conclut comme dans la solution précédente que ce cas est impossible.
- Si $d = 7$, et comme dans le cas précédent, soit $bv_2(a) > 4$ et $n = 4$ auquel cas $(a, b) = (6, 5)$, soit $bv_2(a) \leq 4$. Une étude exhaustive, démontre que le second cas est impossible.

En conclusion, les entiers recherchés sont les paires $(a, b) \in \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (6, 5)\}$.

Barème

Le barème se décompose en deux approches analogues l'une à l'autre, et dont les scores ne s'additionnent pas. Ces deux approches diffèrent dans la manière de traiter les cas $d = 3$ et $d = 7$. Le score de l'élève sera égal au maximum des scores qui lui auraient été attribués au titre de chacune des deux approches.

Chaque approche consiste en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent. Notons toutefois que certains objectifs n'ont de sens que dans la mesure où d'autres objectifs ont préalablement été accomplis.

Approche 1 : Distinguer les valeurs de n.

1. Réécrire l'équation ..... `0 pt`

2. Regarder modulo 4 ou regarder la valuation 2-adique ..... `1 pt`

3. Traiter les trois cas où $d \equiv 1 \pmod 4$ ..... `1 pt`

4. Dans le cas $d = 3$ ou $d = 7$, montrer que $bv_2(a) = v_2(d+9)$ si $n > v_2(d+9)$ ..... `1 pt`

5. Traiter intégralement le cas où $d = 3$ ..... `1 pt`

6. Montrer que b est pair si $d = 7$ et $n \geqslant 5$ ..... `1 pt`

7. Traiter intégralement le cas où $d = 7$ et $n \geqslant 5$ ..... `1 pt`

⚠ Si cet objectif est rempli, l'objectif 6 l'est également.

8. Affirmer que $7776 = 6^5$ ..... `1 pt`

Approche 2 : Distinguer les valeurs de $bv_2(a)$.

1. Réécrire l'équation ..... `0 pt`

2. Regarder modulo 4 ou regarder la valuation 2-adique ..... `1 pt`

3. Traiter l'ensemble des trois cas où $d \equiv 1 \pmod 4$ ..... `1 pt`

4. Dans le cas $d = 3$ ou $d = 7$, montrer que $n = v_2(d+9)$ si $bv_2(a) > v_2(d+9)$ ..... `1 pt`

5. Traiter intégralement le cas où $d = 3$ ..... `1 pt`

6. Montrer que b est pair si $d = 7$ et $bv_2(a) \leqslant 4$ ..... `1 pt`

7. Traiter intégralement le cas où $d = 7$ et $bv_2(a) \leqslant 4$ ..... `1 pt`

⚠ Si cet objectif est rempli, l'objectif 6 l'est également.

8. Affirmer que $7776 = 6^5$ ..... `1 pt`