Olympiade Francophone de Mathématiques

Troisième édition

Épreuve Junior — Solutions et barèmes

1. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ divise n.

Remarque : La partie entière d'un nombre réel $x \geqslant 0$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, et on la note $\lfloor x \rfloor$. Par exemple $\lfloor 1{,}4 \rfloor = 1$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ et $\lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.

Solution

Soit k un entier. On sait que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ si et seulement si $k \leqslant \sqrt{n} < k+1$, c'est-à-dire si

$$k^2 \leqslant n < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1,$$

ou encore $k^2 \leqslant n \leqslant k^2 + 2k$. Cette inégalité étant acquise, k divise n si et seulement si $n/k \in \{k, k+1, k+2\}$. À cette étape, on peut procéder autrement. En effet, en considérant $n - k^2$ et en remarquant que c'est un multiple de k, et qui vérifie $0 \leqslant n - k^2 \leqslant 2k$, on conclut que $n - k^2 \in \{0, k, 2k\}$.

En conclusion, les entiers recherchés sont ceux de la forme k^2, $k(k+1)$ ou $k(k+2)$, avec $k \geqslant 1$.

Barème

Le barème se décompose en deux parties dont les scores s'additionnent. Chaque partie se décompose en un objectif principal et des objectifs secondaires, listés ensuite. Si l'élève accomplit l'objectif principal, il gagne tous les points alloués à cette partie. Sinon, il obtient la somme des scores alloués aux objectifs secondaires qu'il a accomplis.

Partie 1 : Montrer que $n \in \{k^2, k(k+1), k(k+2)\}$ ..... `5 pts`

1. Mentionner que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ ..... `0 pt`
2. Mentionner que $\lfloor x \rfloor > x - 1$ ou $\lfloor x \rfloor + 1 > x$ ..... `1 pt`
3. Montrer que $n < (k+1)^2$ ..... `1 pt`
4. Montrer que $n \geqslant k^2$ ..... `1 pt`
5. Montrer que $k \leqslant n/k \leqslant k+2$ ou que $0 \leqslant n - k^2 \leqslant 2k$ ..... `1 pt`
6. Conclure ..... `1 pt`

Partie 2 : Vérification ..... `2 pts`

1. Mentionner qu'il faut vérifier les solutions ..... `1 pt`
2. Vérifier que $\left\lfloor \sqrt{k(k+1)} \right\rfloor = k$ ou que $\left\lfloor \sqrt{k(k+2)} \right\rfloor = k$ ..... `1 pt`

2. On considère un tableau $n \times n$, avec $n \geqslant 1$. Aya souhaite colorier k cases de ce tableau de sorte qu'il existe une unique manière de placer n jetons sur des cases coloriées sans que deux jetons ne se trouvent sur la même ligne ou la même colonne. Quelle est la valeur maximale de k pour laquelle le souhait d'Aya est réalisable ?

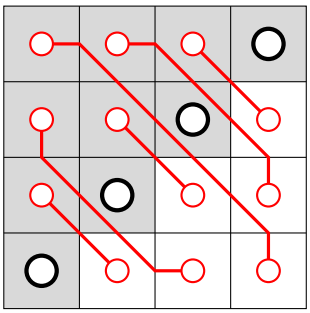
Solutions

Solution 1 Tout d'abord, Aya peut choisir la diagonale, que l'on appellera D, qui est constituée des cases de coordonnées (x, x). Aya entreprend ensuite de colorier toutes les cases situées sur D ou au-dessus de D. De proche en proche, on constate alors qu'elle n'a d'autre choix que de placer ses n jetons sur la diagonale D elle-même. En outre, en procédant ainsi, elle colorie $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ cases. Ainsi, $k \geqslant n(n+1)/2$.

Réciproquement, considérons un coloriage de k cases qui satisfait les conditions de l'énoncé, et la seule disposition possible des jetons sur ces k cases. Même si on échange deux lignes quelconques du tableau, notre coloriage satisfera toujours les conditions de l'énoncé. Par conséquent, et quitte à échanger successivement des lignes du tableau, on suppose sans perte de généralité que les jetons se trouvent sur la diagonale D.

On regroupe alors par paires les cases situées en dehors de D : chaque case de coordonnées (x, y) est appariée avec la case qui lui est symétrique par rapport à D, c'est-à-dire la case de coordonnées (y, x). Si notre coloriage contenait deux cases d'une même paire, disons les cases (x, y) et (y, x), Aya aurait pu ôter les jetons des cases (x, x) et (y, y) et les replacer en cases (x, y) et (y, x). Par conséquent, notre coloriage contient au plus une case de chaque paire. Puisque la diagonale compte n cases et que les autres cases sont réparties en $n(n-1)/2$ paires, on a donc colorié au plus $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ cases, de sorte que $k \leqslant n(n+1)/2$.

On en conclut que $k = n(n+1)/2$.

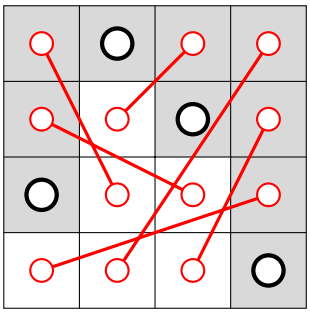


Solution 2 Tout d'abord, Aya peut placer ses jetons sans tenir compte d'un quelconque coloriage, puis colorier chaque case où se trouve un jeton, ou située au-dessus de la case qu'occupe un jeton. En procédant ainsi, elle colorie une case dans la colonne du jeton situé sur la plus haute ligne (ligne n), puis deux cases dans la colonne du jeton situé sur la ligne $n-1$, etc, de sorte qu'elle colorie $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ cases en tout. Par conséquent, $k \geqslant n(n+1)/2$.

Réciproquement, considérons un coloriage de k cases qui satisfait les conditions de l'énoncé, et la seule disposition possible des jetons sur ces k cases. On regroupe par paires les cases sur lesquelles ne se trouve aucun jeton, en procédant comme suit.

Étant donnée une case de coordonnées (x, y), soit (x, y') et (x', y) les deux cases sur lesquelles se trouvent des jetons et qui sont situées sur la ligne et la colonne de notre case. On apparie les cases (x, y) et (x', y'). De la sorte, les cases sur lesquelles ne se trouve aucun jeton sont bien regroupées deux par deux. En outre, si nos deux cases (x, y) et (x', y') étaient coloriées, Aya pourrait ôter les jetons des cases (x, y') et (x', y) pour les replacer en cases (x, y) et (x', y'). Par

conséquent, notre coloriage contient au plus une case de chaque paire, et on conclut comme dans la solution précédente que $k = n(n+1)/2$.



Barème

Le barème se décompose en trois parties. Le score de la première partie s'additionne au score maximal obtenue dans les deuxième et troisième partie, qui constituent des approches équivalentes au même sous-problème. Chaque partie se décompose en un objectif principal et des objectifs secondaires, listés ensuite. Si l'élève accomplit l'objectif principal, il gagne tous les points alloués à cette partie. Sinon, et sauf mention contraire, il obtient la somme des scores alloués aux objectifs secondaires qu'il a accomplis. Par ailleurs, nous avons également listé des ébauches d'approches que nous ne souhaitons pas valoriser.

Ébauches :

1. Traiter le cas $n = 1$ ..... `0 pt`
2. Traiter le cas $n = 2$ ..... `0 pt`

Partie 1 : Montrer que $k \geqslant n(n+1)/2$ ..... `2 pts`

1. Fournir la configuration en escalier (même sur un dessin pour $n = 3$) ..... `1 pt`

⚠ Si l'élève fournit une autre configuration convenable, par exemple celle de la solution 2, un dessin pourra être acceptable s'il représente un tableau $n \times n$ pour un n générique ou bien si on voit explicitement comment généraliser cette construction pour un n quelconque, mais pas s'il représente un simple tableau 3×3 ou 4×4 sans moyen de généraliser pour un n quelconque. Par exemple, le coloriage de la première solution permet de remplir cet objectif, mais celui de la deuxième solution ne le permet pas.

2. En déduire que $k \geqslant n(n+1)/2$ ou que $k \geqslant 1 + 2 + \cdots + n$ ..... `1 pt`

Partie 2 : Montrer que $k \leqslant n(n+1)/2$ ..... `5 pts`

1. Mentionner que l'ordre des colonnes est sans importance sur le problème, et en déduire que l'on peut supposer que nos jetons ont été placés dans une configuration spécifique, par exemple sur la diagonale ..... `2 pts`

⚠ Mentionner qu'on peut supposer que nos jetons ont été placés sur la diagonale suffit à remplir cet objectif.

2. Lorsque les jetons ont été placés sur la diagonale, apparier les cases par symétrie par rapport à la diagonale ..... `1 pt`
3. Montrer que dans chaque paire il y a au plus une case coloriée ..... `1 pt`
4. En déduire que $k \leqslant n(n+1)/2$ ou que $k \leqslant 1 + 2 + \cdots + n$ ..... `1 pt`

Partie 3 : Montrer que $k \leqslant n(n+1)/2$ ..... `5 pts`

1. Partant d'une configuration où l'on a placé les jetons sur des cases quelconques, apparier les cases qui complètent les rectangles ..... `3 pts`
2. Montrer que dans chaque paire il y a au plus une case coloriée ..... `1 pt`
3. En déduire que $k \leqslant n(n+1)/2$ ..... `1 pt`

Remarque : Si l'élève ne trouve pas les mêmes expressions algébriques aux parties 1 et 2/3 et s'il ne mentionne pas qu'elles sont égales, il perd 1 pt.

3. Soit ABC un triangle. On note D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[AC]$. La droite parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (AD) au point X. La droite parallèle à la droite (CX) passant par le point B coupe la droite (AC) en Y. Le cercle circonscrit au triangle ABY recoupe la droite (BX) au point E. Montrer que les points C, D et E sont alignés.

Solutions

Solution 1 Notons α l'angle $\widehat{BAX}$. De la même façon que dans la première solution, on montre que $\widehat{DCA} = \widehat{EXA} = \alpha$. Les points E, B, Y et A sont cocycliques, donc $\widehat{AEB}+\widehat{AYB} = \pi$. De plus, les deux droites (BY) et (CX) sont parallèles, donc $\widehat{AYB} = \widehat{ACX}$. Par suite $\widehat{AEX} + \widehat{XCA} = \pi$, et donc les points A, C, X et E sont cocycliques. Ainsi

$$\widehat{ACE} = \widehat{AXE} = \alpha = \widehat{ACD}$$

ce qui conclut.

Solution 2 Notons α l'angle $\widehat{BAX}$. Les droites (AC) et (BX) sont parallèles et la droite (AX) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Par conséquent, on sait que $\widehat{BAX} = \widehat{XAC} = \widehat{BXA} = \alpha$. Cela signifie que le triangle BAX est isocèle en B et donc $BA = BX$.

En outre, les côtés opposés du quadrilatère $BXCY$ sont parallèles, donc $BXCY$ est un parallélogramme. Ainsi, $CY = BX = BA$. Par ailleurs, le triangle DAC est isocèle en D, donc $\widehat{ACD} = \widehat{DAC} = \widehat{XAC} = \alpha$ et $DA = DC$.

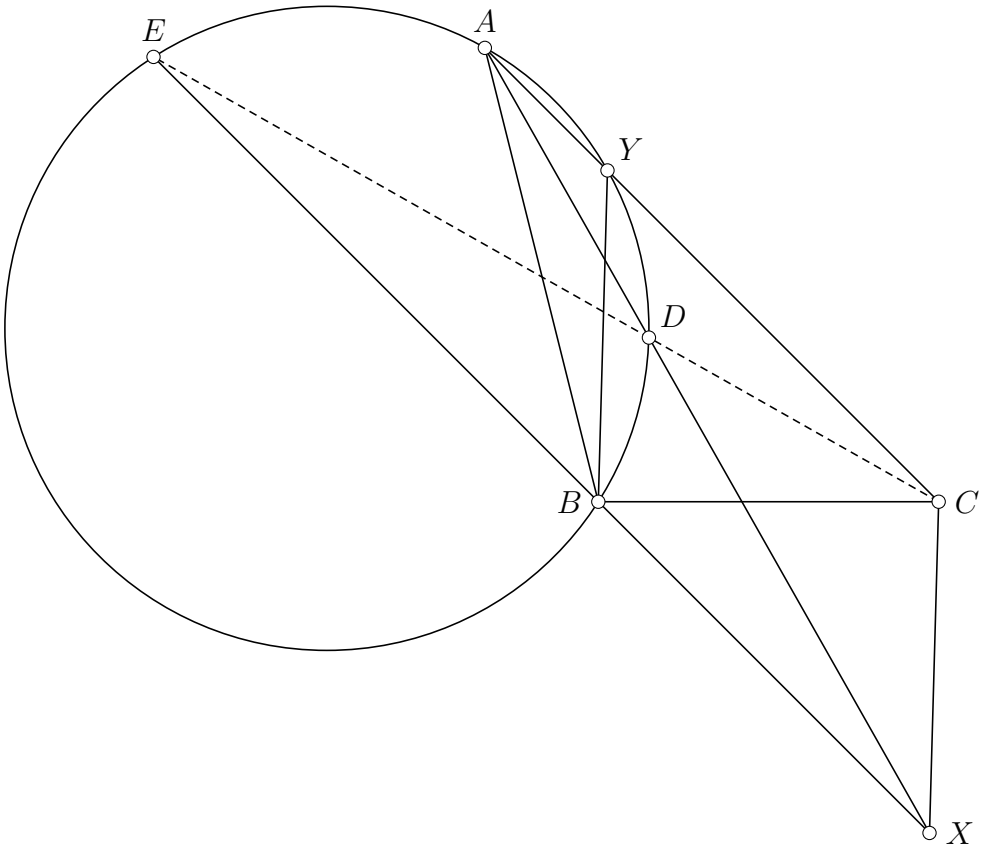
Par conséquent, les triangles DAB et DCY ont chacun un angle de mesure α qui sépare deux côtés de longueurs AB et AD, et ils sont donc isométriques. Mais alors $BD = DY$, ce qui signifie que D est le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAY}$ et de la médiatrice de $[BY]$, c'est-à-dire le pôle Sud de ABY issu de A. En particulier, les points A, B, D et Y sont donc cocycliques.

On vérifie enfin que

$$\widehat{BED} = \widehat{BAD} = \alpha = \widehat{ACD}.$$

Puisque les droites (AC) et (EX) sont parallèles, cela signifie que les angles $\widehat{BED}$ et $\widehat{ACD}$ sont alternes-internes, donc que les points C, D et E sont alignés.

Remarque Si le triangle BAY était isocèle en A, alors $(AD) = (AX)$ est la médiatrice du segment $[BY]$ et donc le triangle BXY est isocèle et par suite $BX = XY$, $\widehat{AXY} = \widehat{AXB} = \widehat{YAX} = \alpha$. Ainsi le triangle AYX est isocèle en Y. Mais alors $AY = YX = BX = YC$ indique que Y est le milieu du segment $[AC]$ et donc que (DY) est la médiatrice de $[AC]$. Puisque $\widehat{YBX} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $BXCY$ est un parallélogramme, on trouve que $\widehat{BYC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Donc $\widehat{BYD} = \widehat{BYC} - \widehat{DYC} = \alpha = \widehat{DAB}$ et par suite D est bien le pôle Sud de ABY issu de A.


E
A
Y
D
B
C
X

Barème

Nous commençons par lister des ébauches d'approches que nous souhaitons valoriser. Les points accordés à ces ébauches ne sont pas cumulables avec les points accordés à l'approche 1 ou à l'approche 2. Le score d'un élève est égal au maximum des scores gagnés.

Ébauches Cette partie est divisée en deux sous-parties : ébauches d'approche 1 et ébauches d'approche 2. Le score ($\leqslant 2$) d'un élève dans cette partie est égal au maximum des scores gagnés dans les deux sous-parties.

Ébauches d'approche 1 :

1. Conjecturer que le quadrilatère $ACXE$ est cyclique ..... 1 pt
2. Mentionner qu'il faut montrer que $\widehat{ACD} = \widehat{ACE}$ ..... 1 pt

Ébauches d'approche 2 :

1. Conjecturer que le quadrilatère $ABDY$ est cyclique ..... 1 pt
2. Mentionner qu'il faut montrer que $\widehat{ACD} = \widehat{XED}$ ..... 1 pt

Approche 1 Le barème de cette approche se décompose en deux parties. Chaque partie se décompose en un objectif principal et des objectifs secondaires, listés ensuite. Si l'élève accomplit l'objectif principal, il gagne tous les points alloués à cette partie.

Partie 1 : Montrer que A, C, X et E sont cocycliques ..... 4 pts

1. Affirmer que $\widehat{AEB} + \widehat{BYA} = \pi$ ou que $\widehat{EAY} + \widehat{YBE} = \pi$ ..... 1 pt
2. Montrer que $\widehat{AYB} = \widehat{ACX}$ ou que $\widehat{EBY} = \widehat{EXC}$ ..... 1 pt
3. Conclure ..... 2 pts

Partie 2 : Montrer que C, D, et E sont alignés ..... 3 pts

1. Montrer que $\widehat{ACD} = \alpha$ ..... 1 pt
2. Montrer que $\widehat{AXE} = \alpha$ ..... 1 pt
3. Conclure ..... 1 pt

Approche 2 Le barème de cette approche se décompose en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent.

1. Montrer que $\widehat{BXA} = \alpha$ et $\widehat{DCY} = \alpha$ ..... 1 pt

⚠ On demande les deux égalités. Un marquage d'égalité des angles sur un dessin est considéré comme une preuve.

2. Montrer que $BA = BX$ et $BX = YC$ ..... 1 pt

⚠ Là encore, on demande les deux égalités. Un marquage d'égalité des longueurs BX et YC sur un dessin est considéré comme une preuve.

3. Montrer que DAB et DCY sont isométriques ..... 1 pt
4. Montrer que A, B, D et Y sont cocycliques ..... 2 pts

⚠ Le traitement du cas où BAY est isocèle en A n'est pas demandé !

5. Conclure ..... 2 pts

4. Trouver le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 = 0$$

admette comme seule solution entière $a = b = c = d = 0$.

Solutions

Solution 1 On vérifie tout d'abord que nul entier $n \leqslant 6$ ne convient. En effet, les quintuplets (a, b, c, d, n) égaux à

$$(1,0,0,1,1),\ (1,1,0,1,2),\ (1,1,1,1,3),\ (2,0,0,1,4),\ (2,1,0,1,5) \text{ et } (2,1,1,1,6)$$

sont solutions de l'équation.

Nous allons maintenant montrer que $n = 7$ est l'entier recherché. En effet, soit (a, b, c, d) une solution à l'équation de l'énoncé, telle que $|d|$ soit minimal.

Si d est impair,

$$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 1 \pmod 8.$$

Or, les seuls carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4. La relation ci-dessus est donc impossible.

Ainsi, d est pair et

$$0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 4.$$

Or, les seuls carrés modulo 4 sont 0 et 1. Par conséquent, $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 0 \pmod 4$, de sorte que a, b et c sont tous pairs.

En conclusion, $(a/2, b/2, c/2, d/2)$ est aussi une solution du problème. Puisque $|d|/2 \geqslant |d|$, on en conclut que $d = 0$, donc que $a = b = c = 0$ aussi. Ainsi, $n = 7$ est bien l'entier recherché.

Solution 2 On propose ici une autre démarche pour montrer que $n = 7$ est l'entier recherché. Procédons par l'absurde et supposons l'existence de a, b, c et d, non tous nuls, tels que $a^2+b^2+c^2-7d^2 = 0$. On remarque alors que $d \neq 0$. Quitte à les diviser par leur pgcd e, on peut supposer que les entiers a, b, c et d sont premiers enter eux ; c'est-à-dire $e = 1$. En réduisant modulo 8, on vérifie que l'équation du problème donne $(a^2, b^2, c^2, d^2) \equiv (0,0,0,0), (4,4,4,4) \pmod 8$ ou $(a^2, b^2, c^2, d^2) \equiv (4,4,0,0) \pmod 8$ et ses permutations. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction avec la supposition $e = 1$.

Barème

Le barème se décompose en plusieurs objectifs dont les scores s'additionnent.

1. Montrer que $n \geqslant 7$ ..... `1 pt`

2. Conjecturer que $n = 7$, une fois l'objectif 1 déjà accompli ..... `1 pt`

3. Énumérer les carrés modulo 4 ou 8 ..... `1 pt`

4. Énumérer les carrés modulo 8 ..... `1 pt`

⚠ Si l'élève accomplit cet objectif, l'objectif 3 est automatiquement accompli.

5. Montrer que a, b, c et d sont pairs ..... `1 pt`

6. Supposer $|d|$ minimal ou $\mathrm{PGCD}(a, b, c, d) = 1$ et conclure ..... `2 pts`

⚠ Les objectifs 3 à 6 peuvent être atteints même si l'élève considère un n distinct de 7 (par exemple $n = 15$), tant que $n \equiv -1 \pmod 8$.