



■ **Problème 1**

Soit  $u_0, u_1, u_2, \dots$  des nombres entiers tels que

- ▷  $u_0 = 100$  ;
- ▷ pour tout  $k \geq 0$ , l'inégalité  $u_{k+2} \geq 2 + u_k$  est satisfaite ;
- ▷ pour tout  $\ell \geq 0$ , l'inégalité  $u_{\ell+5} \leq 5 + u_\ell$  est satisfaite.

Trouver toutes les valeurs possibles pour l'entier  $u_{2023}$ .

---

§ **Solution**

Pour tout entier  $n \geq 0$ , on sait que

$$u_n \geq u_{n+5} - 5 \geq u_{n+10} - 10 \geq u_{n+8} - 8 \geq u_{n+6} - 6 \geq u_{n+4} - 4 \geq u_{n+2} - 2 \geq u_n.$$

Ainsi, toutes nos inégalités sont des égalités, et  $u_n = u_{n+2} - 2 = u_{n+5} - 5$ .

En particulier, pour tous les entiers  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$  et  $\ell \geq 0$ , on a donc  $u_{n+5k+2\ell} = u_n + 5k + 2\ell$ . Ici, pour  $n = 0$ ,  $k = 1$  et  $\ell = 1009$ , cela signifie que  $u_{2023} = u_0 + 2023 = 2123$ . Ainsi, 2023 est la seule valeur éventuellement possible pour l'entier  $u_{2023}$ .

Réciproquement, si chaque nombre  $u_n$  est égal à  $u_n + 100$ , notre suite de nombres satisfait bien les conditions de l'énoncé, et  $u_{2023} = 2123$ . En conclusion, la seule valeur possible est bien 2123.

## ■ Problème 2

Sur son tableau, Alice a écrit  $n$  entiers supérieurs ou égaux à deux, non nécessairement distincts. Elle a ensuite le droit, autant de fois qu'elle le souhaite, d'effacer deux nombres  $a$  et  $b$  distincts l'un de l'autre et de les remplacer par  $q$  et  $q^2$ , où  $q$  désigne le produit de tous les facteurs premiers de  $ab$  (chaque facteur premier est compté une seule fois). Par exemple, si Alice efface les nombres 4 et 6, les facteurs premiers de  $ab = 2^3 \times 3$  sont 2 et 3, donc Alice écrit  $q = 6$  et  $q^2 = 36$ .

Démontrer que, au bout d'un certain temps, et quelle que soit la stratégie d'Alice, la liste des nombres écrits au tableau ne changera plus.

*Remarque :* On considère l'ordre des nombres dans la liste comme sans importance.

---

## § Solution

Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les nombres d'Alice. Ci-dessous, lorsque  $X$  est un ensemble d'entiers fini, on notera  $\prod X$  le produit de ses éléments. Par ailleurs, on note  $\mathcal{P}_i$  l'ensemble des facteurs premiers de  $a_i$ , et  $\mathcal{P}$  la réunion de tous les ensembles  $\mathcal{P}_i$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres premiers divisant au moins un nombre  $a_i$ .

Quand Alice efface deux nombres  $a_i$  et  $a_j$  pour les remplacer par les nombres  $q = \prod(\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j)$  et  $q^2$ , elle ne modifie pas l'ensemble  $\mathcal{P}$ , et remplace chacun des ensembles  $\mathcal{P}_i$  et  $\mathcal{P}_j$  par leur réunion  $\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j$ . Ainsi, pour tout  $i$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_i$  ne peut que croître (pour l'inclusion) au cours du processus, et puisqu'il est contraint à rester un sous-ensemble de  $\mathcal{P}$ , il existe un moment à partir duquel  $\mathcal{P}_i$  ne changera plus.

En sélectionnant le plus tardif de ces moments lorsque  $i$  varie, on obtient un moment, disons  $m$ , à partir duquel plus aucun ensemble  $\mathcal{P}_i$  ne changera. On peut même choisir ce moment de sorte que tout nombre  $a_i$  sur lequel Alice agit un jour a déjà été effacé et remplacé.

Enfin, on dit qu'un nombre  $a_i$  est *petit* s'il est égal au produit  $\prod(\mathcal{P}_i)$ , et *grand* s'il est égal à  $\prod(\mathcal{P}_i)^2$ ; sinon, il est *neutre*. Chaque fois qu'un nombre  $a_i$  subit une opération, il devient petit ou grand; par la suite, il sera toujours soit petit, soit grand.

Mais alors, à partir du moment  $m$ , la liste des nombres écrits au tableau ne changera plus jamais. En effet, si Alice efface deux entiers  $a_i$  et  $a_j$ , chacun des entiers  $a_i$  et  $a_j$  était déjà petit ou grand. Puisque  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j$  et que  $a_i \neq a_j$ , c'est donc que l'un des entiers  $a_i$  et  $a_j$  est petit, et l'autre grand. Mais alors les nombres  $q$  et  $q^2$  que réécrit Alice sont égaux aux entiers  $a_i$  et  $a_j$  qu'elle vient d'effacer.

### ■ Problème 3

Soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles de centres respectifs  $O$  et  $O'$ , tels que  $\Gamma'$  passe par  $O$ . Soit  $M$  un point de  $\Gamma'$  extérieur à  $\Gamma$ . Les tangentes à  $\Gamma$  passant par  $M$  touchent  $\Gamma$  en deux points  $A$  et  $B$ , et recoupernt  $\Gamma'$  en deux points  $C$  et  $D$ . Enfin, on note  $E$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

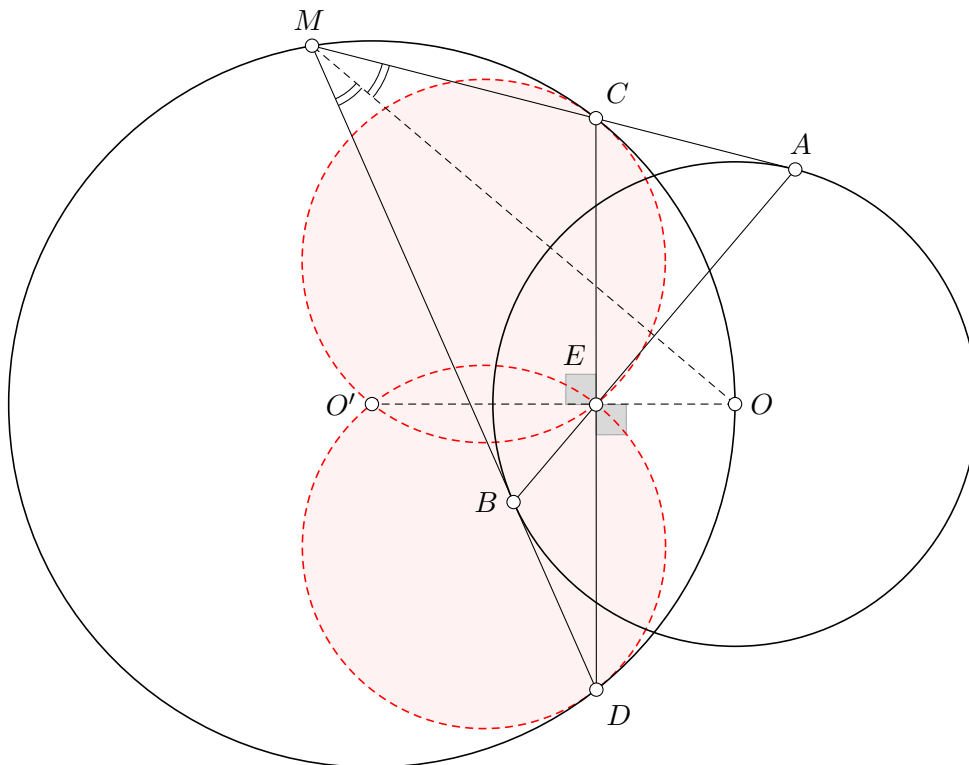
Démontrer que chacun des cercles circonscrits aux triangles  $CEO'$  et  $DEO'$  est tangent au cercle  $\Gamma'$ .

### § Solution n°1

Par construction, les points  $A$  et  $B$  sont symétriques par rapport à la droite  $(OM)$ , qui est donc confondue avec la bissectrice de l'angle  $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ . Puisque  $O$  se trouve sur le cercle circonscrit à  $MCD$ , il s'agit donc du pôle sud de  $MCD$  opposé au sommet  $M$ , c'est-à-dire du milieu de l'arc de cercle  $\widehat{CD}$  ne contenant pas  $M$ . Cela signifie en particulier que  $OC = OD$ .

En outre, et toujours puisque  $O$  appartient au cercle circonscrit à  $MCD$ , ses projetés orthogonaux sur les côtés de  $MCD$  forment une droite de Simson. Or, les projetés orthogonaux de  $O$  sur  $(MC)$  et  $(MD)$  sont  $A$  et  $B$ . La droite de Simson de  $M$  est donc la droite  $(AB)$ , et le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(CD)$  est le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(CD)$ , c'est-à-dire le point  $E$ . Par conséquent, et puisque  $OC = OD$ , le point  $E$  est le milieu du segment  $[CD]$ .

Enfin, comme  $O'C = O'D$ , le triangle  $O'CD$  est isocèle en  $O'$ . Le point  $E$  est donc le pied de la hauteur de  $O'CD$  issue de  $O'$ , ce qui signifie que les angles  $\widehat{O'EC}$  et  $\widehat{O'ED}$  sont droits. En d'autres termes,  $E$  appartient aux cercles de diamètres  $[O'C]$  et  $[O'D]$ . Ces cercles, qui sont manifestement tangents à  $\Gamma'$ , sont donc confondus avec les cercles circonscrits à  $CEO'$  et  $DEO'$ , ce qui conclut.



### § Solution n°2

On propose ici une manière de redémontrer dans le cadre de l'exercice le théorème de Simson, c'est-à-dire l'alignement des points  $A$ ,  $B$  et  $E$ .

On note  $E'$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(CD)$ . Puisque les angles  $\widehat{OBD}$  et  $\widehat{OE'D}$  sont droits, les points  $B$ ,  $E'$ ,  $O$  et  $D$  sont cocycliques. De même, les points  $C$ ,  $E'$ ,  $O$  et  $A$  sont cocycliques. On en déduit que

$$(E'B, E'O) = (DB, DO) = (DM, DO) = (CM, CO) = (CA, CO) = (E'A, E'O),$$

ce qui signifie bien que les droites  $(E'A)$  et  $(E'B)$  sont parallèles, donc confondues. Ainsi,  $E'$  appartient aux droites  $(AB)$  et  $(CD)$ , donc il est confondu avec  $E$ .

### § Solution n°3

Voici une autre manière de redémontrer dans le cadre de l'exercice le théorème de Simson, c'est-à-dire l'alignement des points  $A$ ,  $B$  et  $E$ . Elle nécessite de savoir au préalable que  $OC = OD$ .

Les triangles  $ACO$  et  $BCO$  sont isométriques, car ce sont des triangles rectangles en  $A$  et  $B$ , tels que  $OA = OB$  et  $OC = OD$ . On note ensuite  $E'$  le point d'intersection, autre que  $O$ , des cercles circonscrits à  $ACO$  et à  $BDO$ . On vérifie alors que

$$(E'B, E'A) = (E'B, E'O) + (E'O, E'A) = (DB, DO) + (CO, CA) = (CA, CO) + (CO, CA) = 0^\circ.$$

Cela signifie que  $E'$  appartient à la droite  $(AB)$ . On montre de même que  $E'$  appartient à la droite  $(CD)$ .

Ainsi, les points  $E$  et  $E'$  sont confondus. En particulier, on a donc  $\widehat{CEO} = \widehat{CAO} = 90^\circ$ .

## ■ Problème 4

Trouver tous les entiers  $n \geq 0$  tels que  $20n + 2$  divise  $2023n + 210$ .

---

### § Solution n°1

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$20 \times (2023n + 210) - 2023 \times (20n + 2) = 4200 - 4046 = 154 = 2 \times 7 \times 11,$$

dont les diviseurs sont 1, 2, 7, 11, 14, 22, 77 et 154. Ainsi,  $20n + 2$  vaut 2 ou 22, donc  $n$  vaut 0 ou 1.

Réciproquement,  $n = 0$  est une solution, car 210 est pair, mais  $n = 1$  n'est pas une solution, car  $2023 + 210$  est impair tandis que  $20 + 2$  est pair. En conclusion,  $n = 0$  est la seule solution.

### § Solution n°2

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$20 \times (2023n + 210) - 2023 \times (20n + 2) = 4200 - 4046 = 154.$$

Puisque  $154 < 162 = 20 \times 8 + 2$ , on en déduit que  $0 \leq n \leq 7$ .

En outre, puisque  $20n + 2$  est pair,  $2023n + 210$  est pair aussi, donc  $n$  est pair. Il nous reste donc à étudier les cas où  $n$  vaut 0, 2, 4 ou 6.

- ▷ Si  $n = 0$ , on vérifie bien que  $20n + 2 = 2$  divise  $2023n + 210$ .
- ▷ Si  $n = 2$ , on observe que  $20n + 2 = 42$  ne divise pas 154, car  $3 \times 42 = 126 < 154 < 168 = 4 \times 42$ .
- ▷ Si  $n = 4$ , on observe que  $20n + 2 = 82$  ne divise pas 154, car  $82 < 154 < 164 = 2 \times 82$ .
- ▷ Si  $n = 6$ , on observe que  $20n + 2 = 122$  ne divise pas 154, car  $122 < 154 < 244 = 2 \times 122$ .

En conclusion,  $n = 0$  est la seule solution.

### § Solution n°3

Puisque  $20n + 2$  divise  $2020n + 202$ , il s'agit de trouver les entiers  $n \geq 0$  pour lesquels  $20n + 2$  divise  $3n + 8$ . Or, lorsque  $n \geq 1$ , l'entier  $20n + 2 - (3n + 8) = 17n - 6 \geq 12$  est strictement positif, ce qui signifie que  $20n + 2 > 3n + 8 > 0$ , et donc que  $20n + 2$  ne peut pas diviser  $3n + 8$ . Ainsi,  $n = 0$ , qui est effectivement une solution.

### § Solution n°4

Puisque  $20n + 2$  divise  $2040n + 204$ , il s'agit de trouver les entiers  $n \geq 0$  pour lesquels  $20n + 2$  divise  $17n - 6$ . Or, lorsque  $n \geq 1$ , on sait que  $20n + 2 > 17n - 6 > 0$ , et donc que  $20n + 2$  ne peut pas diviser  $17n - 6$ . Ainsi,  $n = 0$ , qui est effectivement une solution.

### § Solution n°5

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque, et soit  $k$  l'entier tel que  $2023n + 210 = k \times (20n + 2)$ . Puisque

$$101 \times (20n + 2) = 2020n + 202 < 2023n + 210 \leq 2100n + 210 = 105 \times (20n + 2),$$

on sait que  $102 \leq k \leq 105$ .

Il reste maintenant à vérifier les quatre valeurs de  $k$  possibles.

- ▷ Si  $k = 102$ , l'équation devient  $2023n + 210 = 2040n + 204$ , c'est-à-dire  $17n = 6$ . Cette équation n'a aucune solution entière.
- ▷ Si  $k = 103$ , l'équation devient  $2023n + 210 = 2060n + 206$ , c'est-à-dire  $37n = 4$ . Cette équation n'a aucune solution entière.
- ▷ Si  $k = 104$ , l'équation devient  $2023n + 210 = 2080n + 208$ , c'est-à-dire  $57n = 2$ . Cette équation n'a aucune solution entière.

▷ Si  $k = 105$ , l'équation devient  $2023n + 210 = 2100n + 210$ , c'est-à-dire  $77n = 0$ . Cette équation a  $n = 0$  pour unique solution.

En conclusion,  $n = 0$  est la seule solution de notre problème.

### § Solution n°6

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

En outre, puisque  $20n + 2$  est pair,  $2023n + 210$  est pair aussi, donc  $n$  est pair.

On pose donc  $m = n/2$ , de sorte que  $2 \times (20m + 1)$  divise  $2 \times 77m$ , et donc que  $20m + 1$  divise  $77m$ . Comme  $m$  et  $20m + 1$  sont premiers entre eux, cela signifie que  $20m + 1$  divise l'entier  $77 = 7 \times 11$ , dont les diviseurs sont 1, 7, 11 et 77. Par conséquent,  $20m + 1$  vaut 1, donc  $m = 0$  et  $n = 0$ .

Réciproquement,  $n = 0$  est bien une solution.

### § Solution n°7

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Comme  $20n + 2$  divise aussi  $80n + 8$ , il divise donc  $3n + 8$ . On conclut alors comme dans la solution n°3.

### § Solution n°8

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Comme  $20n + 2$  divise aussi  $60n + 6$ , il divise donc  $17n - 6$ . On conclut alors comme dans la solution n°4.

### § Solution n°9

Soit  $n \geq 0$  une solution quelconque. L'entier  $20n + 2$  divise

$$105 \times (20n + 2) - (2023n + 210) = 77n.$$

Soit alors  $k \geq 0$  l'entier tel que  $77n = k \times (20n + 2)$ . Puisque  $77n < 80n + 8 = 4 \times (20n + 2)$ , on sait que  $0 \leq k \leq 3$ .

Il reste maintenant à vérifier les quatre valeurs de  $k$  possibles, ce qui se fait comme dans la solution n°5.