Épreuve Junior   Samedi 29 avril 2023

Les problèmes ne sont *pas* classés par ordre de difficulté

Problème 1

Soit $u_0, u_1, u_2, \ldots$ des nombres entiers tels que

▷ $u_0 = 100$;

▷ pour tout $k \geqslant 0$, l'inégalité $u_{k+2} \geqslant 2 + u_k$ est satisfaite ;

▷ pour tout $\ell \geqslant 0$, l'inégalité $u_{\ell+5} \leqslant 5 + u_\ell$ est satisfaite.

Trouver toutes les valeurs possibles pour l'entier u_{2023}.

Problème 2

Sur son tableau, Alice a écrit n entiers supérieurs ou égaux à deux, non nécessairement distincts. Elle a ensuite le droit, autant de fois qu'elle le souhaite, d'effacer deux nombres a et b distincts l'un de l'autre et de les remplacer par q et q^2, où q désigne le produit de tous les facteurs premiers de ab (chaque facteur premier est compté une seule fois). Par exemple, si Alice efface les nombres 4 et 6, les facteurs premiers de $ab = 2^3 \times 3$ sont 2 et 3, donc Alice écrit $q = 6$ et $q^2 = 36$.

Démontrer que, au bout d'un certain temps, et quelle que soit la stratégie d'Alice, la liste des nombres écrits au tableau ne changera plus.

Remarque : On considère l'ordre des nombres dans la liste comme sans importance.

Problème 3

Soit Γ et Γ' deux cercles de centres respectifs O et O', tels que Γ' passe par O. Soit M un point de Γ' extérieur à Γ. Les tangentes à Γ passant par M touchent Γ en deux points A et B, et recoupent Γ' en deux points C et D. Enfin, on note E le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Démontrer que chacun des cercles circonscrits aux triangles CEO' et DEO' est tangent au cercle Γ'.

Problème 4

Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $20n + 2$ divise $2023n + 210$.

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 7 points